

Węzły i niezmienniki BPS – streszczenie

Piotr Kucharski

22 maja 2017

Jednym z najważniejszych celów współczesnej fizyki teoretycznej jest znalezienie zunifikowanego opisu wszystkich oddziaływań fundamentalnych. Model Standardowy stanowi teorię oddziaływań elektromagnetycznych, słabych i silnych, natomiast grawitacja opisywana jest przez ogólną teorię względności. Do dziś nie udało się osiągnąć unifikacji potwierdzonej w eksperymentach, ale jedną z prób odnoszących najwięcej sukcesów jest teoria strun. Oprócz innych osiągnięć, wniosła ona bardzo wysublimowane narzędzia dla fizyki teoretycznej i matematyki.

Szczególnie owocne okazały się badania łączące teorię strun z topologią. W 1990 roku Edward Witten został nagrodzony Medalem Fieldsa za – między innymi – „jedyną trójwymiarową ze swej istoty interpretację niezmienników Jonesa” [Ati91] w języku teorii Cherna-Simonsa. Ten przełom może być uznany za fundament nowej dziedziny łączącej teorię węzłów nie tylko z kwantową teorią pola, ale także ze strunami i branami.

W [OV00, LM01, LMV00] Labastida, Mariño, Ooguri i Vafa wprowadzili topologiczne niezmienniki węzłów wyrażone przez wielomiany HOMFLY-PT i interpretowane jako wypadkowa liczba stanów BPS w pewnych układach D-bran. W związku z tym niezmienniki BPS muszą być całkowite – to stwierdzenie, znane jako hipoteza Labastidy-Mariño-Ooguriego-Vafy (LMOV), jest jednym z najważniejszych otwartych problemów łączących teorię węzłów z teorią strun. Ponieważ relacja między wielomianami HOMFLY-PT a niezmiennikami BPS jest bardzo skomplikowana, badania hipotezy LMOV koncentrowały się na przykładach w zakresie reprezentacji grupy $U(N)$ odpowiadających skończonej liczbie najprostszych diagramów Younga. W ramach innego nurtu badań, matematycy udowodnili, że wielomiany HOMFLY-PT pokolorowane reprezentacjami symetrycznymi spełniają relacje rekurencyjne zakodowane w wielomianach A [GLL]. Niezależnie, stany BPS były analizowane w kontekście kołczanów i niezmienników Donaldsona-Thomasa [KS, KS11, Rei12].

Niniejsza rozprawa ma dwa główne cele. Pierwszym jest znalezienie relacji między wielomianami A oraz kołczanami z jednej strony, a węzłami i niezmiennikami BPS z drugiej. Drugi cel stanowi otrzymanie szerokiego spektrum ścisłych i jawnych wyników dotyczących struktury niezmienników BPS, a w szczególności wniesienie nowej perspektywy na hipotezę LMOV i udowodnienie jej w

możliwie ogólnym zakresie, korzystając ze znalezionych relacji. Wyniki tej rozprawy zostały przedstawione również w pracach [GKS16, KS16, KRSS].

Na poziomie klasycznym powyższe cele osiągnięte są przez wprowadzenie nowej krzywej algebraicznej nazwanej dualnym wielomianem A , jego ekstremalnej granicy, jak również ekstremalnych niezmienników BPS. Analiza rozwiązań równań dualnych wielomianów A prowadzi do ścisłych wyrażeń na klasyczne niezmienniki BPS dla wszystkich reprezentacji symetrycznych. Formuły te prowadzą do nietrywialnych twierdzeń o całkowitości w ramach teorii liczb, jak również do odkrycia hipotezy całkowitości silniejszej niż dotychczas znane przewidywania M-teorii. Wszystkie te wyniki zostały przedstawione w [GKS16].

Co więcej, uogólnienie relacji łączących dualne wielomiany A z niezmiennikami BPS na poziom kwantowy ujawnia nieoczekiwany związek z gałęzią matematyki znaną jako kombinatoryka na słowach [KS16]. W konsekwencji kwantowe niezmienniki BPS mogą zostać zadane w ramach modelu kombinatorycznego skonstruowanego na podstawie kwantowych dualnych wielomianów A . Model ten prowadzi do jawnych relacji rekurencyjnych spełnianych przez kwantowe niezmienniki BPS oraz do dowodu ich całkowitości dla dużej klasy węzłów.

Omawiana konstrukcja kombinatoryczna prowadzi również do relacji między niezmiennikami Donaldsona-Thomasa dla kołczanu o jednym wierzchołku, a niezmiennikami BPS dla węzła trywialnego. Co istotne, związek ten okazuje się być bardziej ogólny i w [KRSS] pokazano, że funkcje generujące wielomiany HOMFLY-PT dla wielu innych węzłów mogą być zidentyfikowane jako funkcje generujące niezmienniki Donaldsona-Thomasa dla odpowiednich kołczanów. Prowadzi to do zaskakującej dualności między węzłami a kołczanami, a w szczególności między węzłowymi niezmiennikami BPS, a całkowitymi niezmiennikami Donaldsona-Thomasa [KRSS]. Z tego wynika, że identyfikacja kołczanu odpowiadającego węzłowi – która dokonana została w [KRSS] dla dużej klasy węzłów – automatycznie potwierdza hipotezę Labastidy-Mariño-Ooguriego-Vafy dla wszystkich reprezentacji symetrycznych dla danego węzła. Możliwość dowodzenia hipotezy LMOV jest tylko jedną z głębokich konsekwencji dualności między węzłami a kołczanami przedstawionej w tej pracy.

Podsumowując, zastosowanie wielomianów A oraz kołczanów do analizy niezmienników BPS dla węzłów prowadzi do wielu nowych wyników i ciekawych powiązań, które zasługują na dalsze badania.

Literatura

- [Ati91] Michael Atiyah. On the work of Edward Witten. In I. Satake, editor, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 21-29 August 1990)*, volume 1, pages 31–35. Mathematical Society of Japan (Tokyo), 1991.
- [GKS16] Stavros Garoufalidis, Piotr Kucharski, and Piotr Sułkowski. Knots, BPS states, and algebraic curves. *Comm. Math. Phys.*, 346(1):75–113, 2016. arXiv:1608.06600.
- [GLL] Stavros Garoufalidis, Aaron D. Lauda, and Thang T. Q. Lê. The colored HOMFLY-PT polynomial is q -holonomic. arXiv:1604.08502.
- [KRSS] Piotr Kucharski, Markus Reineke, Marko Stošić, and Piotr Sułkowski. Knots-quivers correspondence. To appear.
- [KS] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. arXiv:0811.2435.
- [KS11] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants. *Commun. Num. Theor. Phys.*, 5:231–352, 2011. arXiv:1006.2706.
- [KS16] Piotr Kucharski and Piotr Sułkowski. BPS counting for knots and combinatorics on words. *JHEP*, 1611:120, 2016. arXiv:1504.06327.
- [LM01] J. M. F. Labastida and Marcos Mariño. Polynomial invariants for torus knots and topological strings. *Comm. Math. Phys.*, 217(2):423–449, 2001. arXiv:hep-th/0004196.
- [LMV00] José M. F. Labastida, Marcos Mariño, and Cumrun Vafa. Knots, links and branes at large N . *JHEP*, 0011:007, 2000. arXiv:hep-th/0010102.
- [OV00] Hiroshi Ooguri and Cumrun Vafa. Knot invariants and topological strings. *Nucl. Phys.*, B577:419–438, 2000. arXiv:hep-th/9912123.
- [Rei12] Markus Reineke. Degenerate cohomological hall algebra and quantized donaldson-thomas invariants for m-loop quivers. *Doc. Math.*, 17:1, 2012. arXiv:1102.3978.